

SOLUCIONES COMPROMISO PARA UN JUEGO DIFERENCIAL SOBRE LA COOPERACIÓN MEDIO AMBIENTAL

SOTO TORRES M. D.

Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid
correo-e: lolasoto@eco.uva.es

FERNÁNDEZ LECHÓN R.

Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid
correo-e: ramonfer@eco.uva.es

ARRANZ SOMBRÍA M. R.

Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid
correo-e: rosa@eco.uva.es

Resumen

En este trabajo, considerando un juego diferencial de suma no nula propuesto por Kaitala y Pohjola con objeto de estudiar los costes asociados a las emisiones de CO₂ a la atmósfera, por dos coaliciones internacionales, respecto a unas cuotas establecidas y los costes asociados al mantenimiento de una atmósfera contaminada, se determinan las alternativas de solución que tiene la coalición cuando el juego se desarrolla sobre distintos horizontes temporales y ajustes cuadráticos para todas las funciones de costes. La dependencia de las soluciones sobre el horizonte temporal permite, pactada una de ellas, encontrar otra solución con disminución de costes para ambas coaliciones. La búsqueda de la nueva solución utilizando el concepto de solución compromiso es estudiada en este trabajo.

Palabras clave: Juegos diferenciales, soluciones eficientes, soluciones compromiso.

1. INTRODUCCIÓN

Es sobradamente conocido la gran preocupación existente desde hace varios años respecto al mantenimiento de una política medio ambiental que reduzca la emisión de CO₂ a la atmósfera para intentar paliar el efecto invernadero.

El Protocolo de Kyoto, adoptado por las Naciones Unidas en diciembre de 1.997 establece el objetivo de reducir las emisiones de gases de efecto invernadero en los países industrializados un 5 % por debajo de los niveles de 1.990. Este objetivo debe alcanzarse en el promedio de las emisiones que se realicen en el periodo 2.008-2.012. La Comunidad Europea firmó el Protocolo en abril de 1.998, en abril de 2.001, el Consejo Europeo confirmó su voluntad de aprobar dicho Protocolo e instó a los Estados miembros a su ratificación al mismo tiempo que la Comunidad y, en la medida de lo posible, antes de junio de 2.002. El 25 de abril de 2.002 la Comunidad Europea ratifica el Protocolo y se compromete a reducir sus emisiones de gases de efecto invernadero en un 8 % entre 2.008 y 2.012 respecto a los niveles de 1.990. Por su parte España se compromete a no aumentar sus emisiones en más de un 15 % sobre los niveles de 1.990.

Para que el Protocolo de Kyoto entre en vigor es necesario que esté ratificado por un conjunto de países que representen al menos el 55 % de las emisiones de los países industrializados. En la actualidad el Protocolo no ha entrado en vigor como consecuencia de que dos de los países que producen una mayor cantidad de emisiones, EEUU y Rusia, no lo han ratificado. EEUU ha decidido no ratificarlo y Rusia está retrasando su decisión, aunque se espera que lo haga.

El Protocolo no establece penalizaciones coercitivas para forzar el cumplimiento de los compromisos de cada país signatario, pero la aplicación del Protocolo en Europa ha ido más lejos introduciendo sanciones por incumplimiento, además asigna unos objetivos por países debido a que reducir las emisiones es más costoso en unos países que en otros.

Estos costes que conlleva la reducción de emisiones ha hecho que surjan trabajos que, bajo distintas metodologías, tratan de estudiar este problema.

Considerando dos bloques internacionales, para abordar el problema de la valoración de los costes asociados al mantenimiento de unas cuotas de emisión pactadas y el coste que ocasiona, a cada uno de ellos, el compartir una atmósfera contaminada, Kaitala y Pohjola (1.995) formularon un juego diferencial en horizonte infinito, cuya variable de estado correspondía al exceso de CO₂ en la atmósfera respecto al nivel existente en 1.990, estando determinada su evolución en el tiempo como una función de las emisiones de las coaliciones y de la actuación de limpieza natural del medio ambiente.

Ahora bien, si se reconsidera este juego ajustando también los costes instantáneos mediante funciones cuadráticas y suponiendo que los dos bloques internacionales se coaligan y deciden adoptar soluciones cooperativas, la amplitud del horizonte temporal que se elija en la formulación del juego dinámico determina, en gran medida, la magnitud de los costes asociados a los jugadores durante el desarrollo del juego si este horizonte temporal es la única variable del juego.

Los resultados que presentamos en el trabajo mostrarán que, fijada una amplitud temporal para el juego y aceptada una estrategia cooperativa, siempre es posible disminuir los costes de los jugadores si disminuye el tiempo sobre el que se desarrolla el juego; de este modo, es posible plantearse distintas etapas en un proceso de negociación y en una primera fase alcanzar un acuerdo sobre un horizonte temporal amplio aunque con costes elevados para ambas coaliciones, para desde ella negociar, en una segunda etapa, una amplitud temporal menor con disminución de costes para cada bloque. El análisis de la estrategia cooperativa que en esta segunda etapa adoptarán las coaliciones internacionales es el objetivo de este trabajo.

Por ello, el desarrollo del trabajo se centra primero en determinar las fronteras de Pareto del juego considerando distintos horizontes temporales, finitos e infinito lo que permitirá comprobar como desde una solución eficiente es posible encontrar otras nuevas soluciones eficientes que provocan una disminución de costes para el mismo juego pero con un horizonte temporal inferior. Obtenido este resultado será necesario negociar qué nueva estrategia cooperativa adoptarán los jugadores y para ello se utilizará el concepto de solución compromiso, rescatado desde programación multiobjetivo, como aquella que minimiza la distancia respecto al punto ideal. Las

características que tienen que verificar las distintas soluciones compromiso también son estudiadas en este trabajo que concluye destacando los aspectos más relevantes obtenidos.

2. SOLUCIONES EFICIENTES

Designemos por $Q(t)$ el exceso de CO₂ en la atmósfera en $t \geq 0$ respecto de sus valores de referencia del año 1.990, por $e_1(t)$, $e_2(t)$, respectivamente, las emisiones instantáneas de CO₂ de dos regiones cada una de las cuales está constituida por coaliciones de países y por e_{1m} , e_{2m} las cuotas de emisión de CO₂ fijadas para cada una de estas coaliciones mediante un acuerdo. Si consideramos un horizonte temporal de amplitud finita T o infinita y suponemos que cada coalición trata de minimizar el valor actual del coste asociado a la desviación de sus emisiones respecto a sus cuotas de emisión acordadas en cada momento más el valor actual del coste asociado al nivel de CO₂ presente en la atmósfera en ese momento, cada coalición tratará de minimizar

$$\int_0^T e^{-\rho t} [C_i(e_i(t)) + D_i(Q(t))] dt,$$

conociendo que la evolución del exceso de CO₂ verifica la ecuación diferencial

$$\dot{Q}(t) = \sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t), \quad Q(0) = Q_0 = 0,$$

siendo ρ la tasa de actualización, σ y β parámetros positivos que recogen la intervención de la naturaleza sobre las emisiones y sobre la contaminación medio ambiental latente en la atmósfera y C_i , D_i , para $i = 1, 2$, funciones de costes para cada coalición, la primera hace referencia a los costes de emisión y la segunda a los costes por soportar esa contaminación ambiental.

Tenemos, por tanto, formulado un juego diferencial con dos jugadores, de suma no nula sobre un horizonte temporal finito o infinito. Si suponemos que ambas coaliciones acuerdan seguir estrategias cooperativas en la búsqueda de soluciones para sus problemas, ellas constituirán un único agente que tratará de resolver el problema de los dos objetivos, sujeto a la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la contaminación ambiental.

Para encontrar las soluciones cooperativas podemos utilizar el procedimiento de las ponderaciones y ajustando funciones cuadráticas a las funciones de costes especificadas en los funcionales de los jugadores, tendremos que resolver el problema uniobjetivo:

$$\min \int_0^T e^{-\rho t} \left[\frac{\alpha}{2} (c_1 (e_1(t) - e_{1m})^2 + d_1 Q^2(t)) + \frac{(1-\alpha)}{2} (c_2 (e_2(t) - e_{2m})^2 + d_2 Q^2(t)) \right] dt$$

s. a: $\dot{Q}(t) = \sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t), \quad Q(0) = 0,$

donde $\alpha \in (0,1)$ es el parámetro que pondera los funcionales de los jugadores y c_1, c_2, d_1 y d_2 son parámetros positivos que recogen costes que posiblemente sean diferentes para cada una de las coaliciones. El jugador cooperativo tratará de encontrar los valores de $e_1(t), e_2(t)$, para todo $t \in [0, T]$ que aseguren que el problema dinámico alcanza un mínimo.

2.1. Horizonte temporal infinito

Resolviendo el problema uniobjetivo de las ponderaciones por el principio del máximo, tenemos que el hamiltoniano asociado viene dado por:

$$H = \frac{\alpha}{2} (c_1 (e_1(t) - e_{1m})^2 + d_1 Q^2(t)) + \frac{(1-\alpha)}{2} (c_2 (e_2(t) - e_{2m})^2 + d_2 Q^2(t)) + \varphi(t) (\sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t)),$$

donde $\varphi(t)$ es la variable de coestado.

Las condiciones necesarias establecidas por el principio del máximo, que en este problema son suficientes debido a la convexidad del hamiltoniano, nos llevan a que los controles que resuelven el problema han de satisfacer:

$$e_1(t) = e_{1m} - \varphi(t) \frac{\sigma}{\alpha c_1}, \quad e_2(t) = e_{2m} - \varphi(t) \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2},$$

y, por consiguiente, el sistema dinámico que gobierna la evolución de la variable de estado $Q(t)$ y de la variable de coestado $\varphi(t)$, bajo estos controles será:

$$\dot{Q}(t) = \sigma(e_{1m} + e_{2m}) - \left(\frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right) \varphi(t) - \beta Q(t),$$

$$\dot{\varphi}(t) = -[\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2]Q(t) + (\rho + \beta)\varphi(t).$$

La solución del sistema dinámico que se obtiene teniendo en cuenta el valor inicial de la variable de estado $Q(0) = 0$ y la condición de transversalidad sobre la variable de coestado $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \varphi(t) = 0$, nos permitirán encontrar la estrategia a seguir por el jugador cooperativo durante el desarrollo del juego.

Para estudiar el comportamiento temporal de estas variables, observamos que el sistema dinámico tiene un único estado de equilibrio $(Q^*(\alpha), \varphi^*(\alpha))$, donde:

$$Q^*(\alpha) = \frac{\sigma(e_{1m} + e_{2m})(\rho + \beta)}{\left(\frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right) [\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2] + (\rho + \beta)\beta},$$

$$\varphi^*(\alpha) = \frac{\sigma(e_{1m} + e_{2m})[\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2]}{\left(\frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right) [\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2] + (\rho + \beta)\beta},$$

que es un punto de silla, ya que la matriz jacobiana asociada al sistema dinámico constituido por la variable de estado y coestado admite dos valores propios, uno positivo y otro negativo. Denotando por λ_1 el valor propio positivo y por λ_2 el negativo, sus expresiones son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\sigma^2 \left(\frac{1}{\alpha c_1} + \frac{1}{(1-\alpha)c_2} \right) (\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) + 4(\rho + \beta)\beta} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\sigma^2 \left(\frac{1}{\alpha c_1} + \frac{1}{(1-\alpha)c_2} \right) (\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) + 4(\rho + \beta)\beta} \right).$$

Situándonos sobre la variedad estable asociada al estado de equilibrio, obtenemos el comportamiento dinámico de la variable de estado y de la variable de coestado cuya evolución en el plano de fase es lineal

$$\varphi - \varphi^*(\alpha) = \frac{[\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2]}{(\rho + \beta) - \lambda_2} (Q - Q^*(\alpha))$$

y podemos evaluar el valor que alcanzan los funcionales para cada uno de los jugadores en las estrategias cooperativas obtenidas. Sustituyendo, encontramos

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\alpha^2 c_1} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\frac{\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2}{\lambda_2 - (\rho + \beta)} Q^*(\alpha) e^{\lambda_2 t} + \varphi^*(\alpha) \right]^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} d_1 \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[Q^*(\alpha) - Q^*(\alpha) e^{\lambda_2 t} \right]^2 dt,$$

$$J_2(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2 c_2} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\frac{\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2}{\lambda_2 - (\rho + \beta)} Q^*(\alpha) e^{\lambda_2 t} + \varphi^*(\alpha) \right]^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} d_2 \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[Q^*(\alpha) - Q^*(\alpha) e^{\lambda_2 t} \right]^2 dt.$$

La curva paramétrica $(J_1(\alpha), J_2(\alpha))$ para los distintos valores de $\alpha \in (0,1)$ determina la frontera de Pareto para el juego en horizonte infinito; su representación se muestra en la grafica 1 y corresponde a la curva más alejada del origen.

Hay que destacar que el comportamiento de las emisiones, proporcionado por la estrategia cooperativa, no tiende a los valores de las cuotas pactadas ya que la variable de coestado tiende hacia su valor de equilibrio.

2.2. Horizonte temporal finito

Si el horizonte temporal es finito y aplicamos de nuevo el principio del máximo sobre el problema de las ponderaciones, donde por los mismos motivos que en el caso anterior las condiciones necesarias son también condiciones suficientes, encontramos las mismas expresiones para los controles y, por tanto, el sistema dinámico que satisfacen la variable de estado y coestado es el mismo que en el caso de horizonte infinito que sabemos tiene un único estado de equilibrio que es un punto de silla. La resolución del sistema dinámico teniendo en cuenta la condición inicial de la variable de estado $Q(0) = 0$ y, ahora, la condición final sobre la variable de coestado $\varphi(T) = 0$, nos

permite determinar el comportamiento en el tiempo de estas variables que vienen dadas por las expresiones:

$$Q(t) = G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t} + G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t} + Q^*(\alpha)$$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2}{\rho + \beta - \lambda_1} G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t} + \frac{\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2}{\rho + \beta - \lambda_2} G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t} + \varphi^*(\alpha)$$

siendo

$$G_1(\alpha) = \frac{-\varphi^*(\alpha) + \frac{(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2)Q^*(\alpha)}{\rho + \beta - \lambda_2} e^{\lambda_2 T}}{(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \left(\frac{e^{\lambda_1 T}}{\rho + \beta - \lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 T}}{\rho + \beta - \lambda_2} \right)},$$

$$G_2(\alpha) = \frac{\varphi^*(\alpha) - \frac{(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2)Q^*(\alpha)}{\rho + \beta - \lambda_1} e^{\lambda_1 T}}{(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \left(\frac{e^{\lambda_1 T}}{\rho + \beta - \lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 T}}{\rho + \beta - \lambda_2} \right)}.$$

y, por consiguiente, podemos encontrar los controles de los jugadores durante el desarrollo del juego y evaluar sus funcionales que ahora vienen dados por las expresiones:

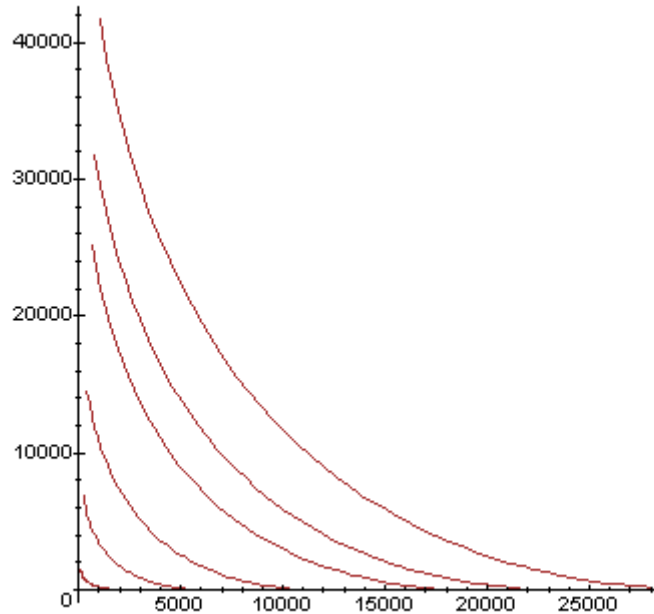
$$J_1 T(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\alpha^2 c_1} \int_0^T e^{-\rho t} \left[(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \left(\frac{G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t}}{\rho + \beta - \lambda_1} + \frac{G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t}}{\rho + \beta - \lambda_2} \right) + \varphi^*(\alpha) \right]^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} d_1 \int_0^T e^{-\rho t} \left[G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t} + G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t} + Q^*(\alpha) \right]^2 dt,$$

$$J_2 T(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2 c_2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \left(\frac{G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t}}{\rho + \beta - \lambda_1} + \frac{G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t}}{\rho + \beta - \lambda_2} \right) + \varphi^*(\alpha) \right]^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{2} d_2 \int_0^T e^{-\rho t} \left[G_1(\alpha)e^{\lambda_1 t} + G_2(\alpha)e^{\lambda_2 t} + Q^*(\alpha) \right]^2 dt.$$

Los valores $(J_1T(\alpha), J_2T(\alpha))$, con $\alpha \in (0,1)$, constituyen las soluciones no dominadas; su representación gráfica para distintos valores del horizonte temporal finito también se muestran en la gráfica 1, donde a medida que el horizonte temporal es más amplio la curva correspondiente está más alejada del origen.



Gráfica 1: Fronteras de Pareto para distintos horizontes temporales

Podemos observar, que a diferencia de lo que ocurre cuando el horizonte temporal no es finito, las emisiones de las coaliciones alcanzan en T los valores de las emisiones pactadas.

Desde las expresiones obtenidas para los funcionales de los jugadores siguiendo la estrategia del jugador cooperativo, que proporcionan la obtención de las curvas paramétricas, podemos comprobar ciertos resultados que nos permiten relacionar los costes de los jugadores para los distintos horizontes temporales. Por una parte, se puede observar que el valor actual de los costes que tiene el jugador $i = 1,2$, con funcional $J_i(\alpha)$ para el juego en horizonte infinito, $J_iT(\alpha)$ si el juego tiene horizonte temporal T , se pueden representar mediante funciones estrictamente monótonas del parámetro de ponderación α , siendo sus formas cualitativas independientes del horizonte temporal del juego. De esto se deduce que el comportamiento cualitativo de las fronteras de Pareto también es independiente del horizonte temporal. Además, puede

destacarse que $\lim_{T \rightarrow \infty} (J_1 T(\alpha), J_2 T(\alpha)) = (J_1(\alpha), J_2(\alpha))$ y que las pendientes de las fronteras de Pareto satisfacen para cualquier valor de α

$$\left. \frac{d J_2}{d J_1} \right|_{\alpha^*} = \frac{\frac{d J_2}{d \alpha}(\alpha^*)}{\frac{d J_1}{d \alpha}(\alpha^*)} = \frac{\frac{d J_2 T}{d \alpha}(\alpha^*)}{\frac{d J_1 T}{d \alpha}(\alpha^*)},$$

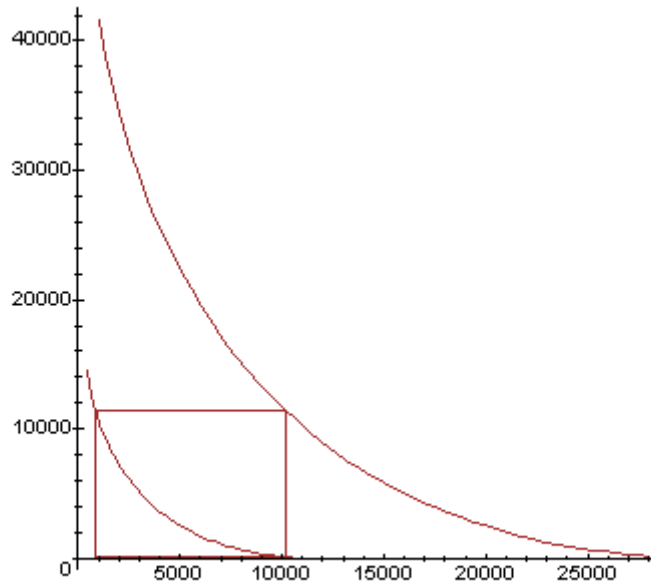
esto es, son independientes del horizonte temporal sobre el que se desarrolle el juego para un mismo valor del parámetro de ponderación.

3. SOLUCIONES COMPROMISO

Fijadas las cuotas de emisión pactadas así como los valores de $c_i, d_i, i = 1, 2$ y observando las gráficas obtenidas de las fronteras de Pareto para distintos horizontes temporales del juego, podemos comprobar que si se fija un horizonte temporal y una solución cooperativa es aceptada, por ejemplo, una solución cooperativa de Nash, o de Kalai-Smorodinsky, siempre existe un intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ tal que el coste de al menos uno de los dos jugadores disminuye si disminuye la amplitud del horizonte temporal. Notemos que en el intervalo (α_1, α_2) los dos jugadores disminuyen los costes al disminuir la amplitud. En la gráfica 2 se muestra este resultado para dos fronteras de Pareto, una en horizonte infinito y otra en horizonte finito.

La cuestión que nos planteamos ahora es determinar qué solución adoptarían los jugadores si se acepta una disminución del horizonte temporal en el que se desarrolla el juego. Este nuevo proceso de negociación nos permite considerar una nueva situación para la que existe un punto ideal y un punto de desacuerdo que, desde luego, no tienen por qué coincidir con aquellos que posiblemente fueron utilizados para encontrar la solución cooperativa del horizonte temporal más amplio. La gráfica anterior muestra el punto ideal y el punto de desacuerdo cuando se ha iniciado el proceso de negociación para la disminución del horizonte temporal y antes se había acordado poner en práctica una estrategia seleccionada en la frontera de Pareto con horizonte temporal infinito. Observemos que el punto ideal, en la nueva situación, corresponde a una solución eficiente cuando el horizonte temporal es menor que el que se está pactando y el punto

de desacuerdo es una solución eficiente en el juego con un horizonte temporal más amplio.



Gráfica 2: Puntos ideal y de desacuerdo

Para encontrar la nueva solución cooperativa podemos utilizar el concepto de solución compromiso, esto es, los jugadores adoptarían alguna de aquellas soluciones eficientes que minimizan su distancia, definida desde la norma l_p , con respecto al punto ideal. De este modo, buscamos un $\alpha^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ tal que sea la solución óptima de alguno de los problemas asociado a la distancia, esto es,

$$\min d_p((J_1T(\alpha), J_2T(\alpha)), (J_1I, J_2I)), \quad s. a: \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2),$$

donde (J_1I, J_2I) son las componentes del punto ideal. Como hemos de resolver distintos problemas, dependiendo del valor de $p = 1, 2, \dots, \infty$, analizamos a continuación la resolución de forma separada.

3.1. Solución compromiso: $p = 1$

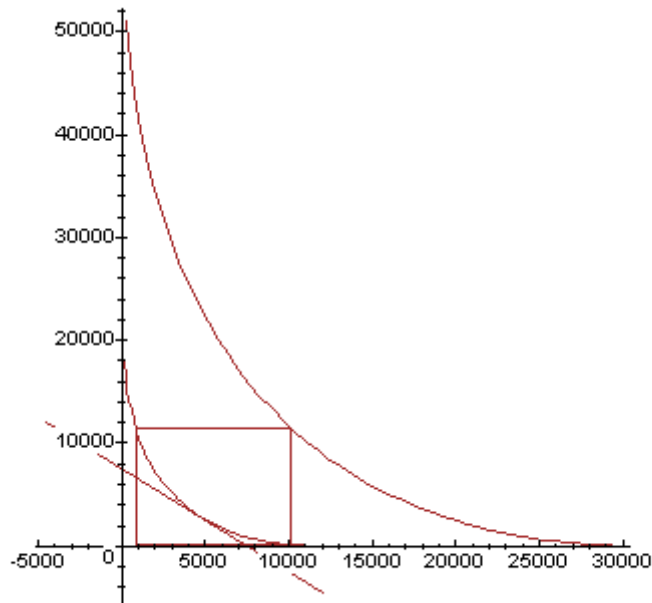
En este caso tendremos que resolver el problema diferenciable

$$\min J_1T(\alpha) - J_1I + J_2T(\alpha) - J_2I, \quad s. a: \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2],$$

que siempre admite mínimo global. Si $\alpha^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ es el mínimo global, entonces:

$$\frac{d J_1 T(\alpha^*)}{d \alpha} + \frac{d J_2 T(\alpha^*)}{d \alpha} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d J_2 T}{d J_1 T} \right|_{\alpha^*} = -1 ,$$

luego la recta tangente al punto de la frontera de Pareto correspondiente a α^* , $(J_1 T(\alpha^*), J_2 T(\alpha^*))$, es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.



Gráfica 3: $\alpha^* = 0,5$ solución para $p = 1$

La gráfica 3 muestra la solución interior para el problema que analizamos. Si el problema no admite solución interior, la solución compromiso se alcanzará en la frontera del intervalo y presenta el inconveniente de que su selección implicaría la disminución del coste de sólo uno de los jugadores mientras que el otro jugador mantiene el coste.

3.2. Solución compromiso: p distinto de 1 y finito

El problema diferenciable que ahora tenemos que resolver es:

$$\min \left[\sum_{i=1}^2 |J_i T(\alpha) - J_i I|^p \right]^{1/p}, \quad s. a : \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2],$$

o equivalentemente

$$\min (J_1T(\alpha) - J_1I)^p + (J_2T(\alpha) - J_2I)^p, \quad s. a: \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

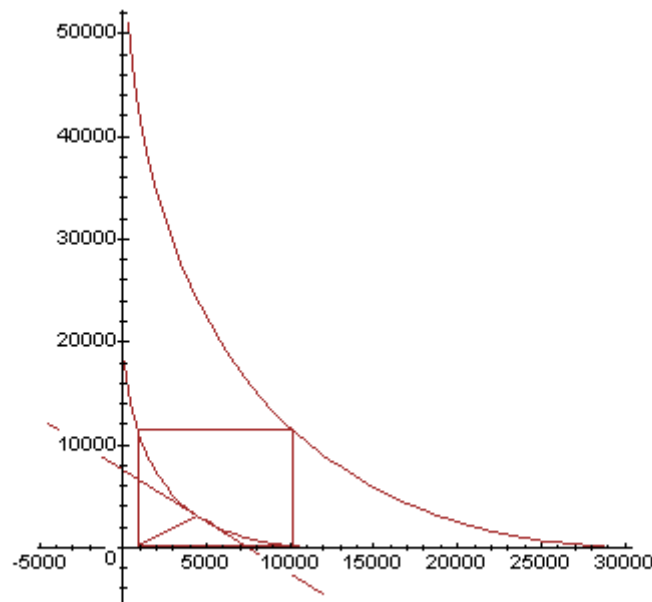
y considerando condiciones necesarias sobre él, encontramos que si $\alpha^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ es mínimo tendrá que satisfacer:

$$(J_1T(\alpha^*) - J_1I)^{p-1} \frac{dJ_1T(\alpha^*)}{d\alpha} + (J_2T(\alpha^*) - J_2I)^{p-1} \frac{dJ_2T(\alpha^*)}{d\alpha} = 0,$$

por tanto, $\left. \frac{dJ_2T}{dJ_1T} \right|_{\alpha^*} = - \left(\frac{J_1T(\alpha^*) - J_1I}{J_2T(\alpha^*) - J_2I} \right)^{p-1}$. En particular si $p = 2$ y por tanto se está

considerando la distancia euclídea, obtendremos desde la expresión anterior que la recta pasando por los puntos (J_1I, J_2I) , $(J_1T(\alpha^*), J_2T(\alpha^*))$ tiene que ser perpendicular a la recta tangente a la frontera de Pareto $(J_1T(\alpha), J_2T(\alpha))$ en el punto $(J_1T(\alpha^*), J_2T(\alpha^*))$.

En la gráfica 4 se recoge esta solución interior. De nuevo podemos realizar las mismas consideraciones que en $p = 1$ si el mínimo global no se alcanza en el interior del intervalo.



Gráfica 4: Solución para $p = 2$

3.3. Solución compromiso: Distancia infinita

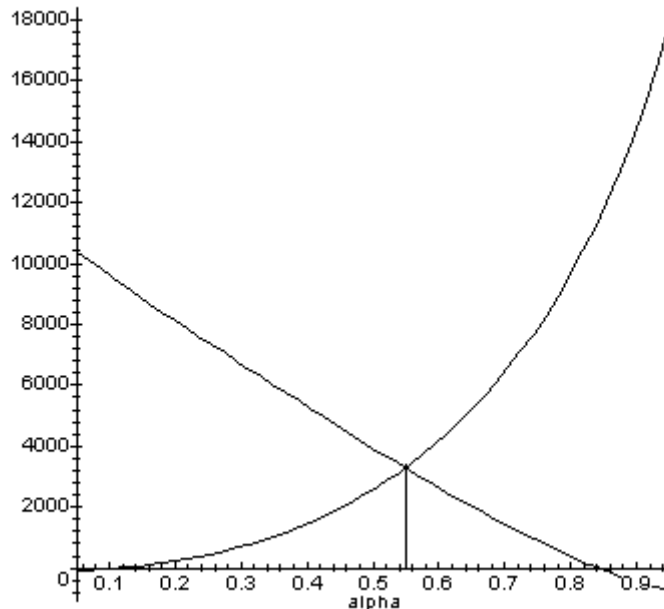
Si $p = \infty$, tendremos la distancia de Tchebycheff y hemos de resolver el problema:

$$\min_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \max_{1 \leq i \leq 2} |J_i T(\alpha) - J_i I|,$$

esto es,

$$\min_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \max \{J_1 T(\alpha) - J_1 I, J_2 T(\alpha) - J_2 I\},$$

que fácilmente puede ser resuelto de forma gráfica como se observa a continuación:



Gráfica 5: Solución con la distancia de Tchebycheff

Los desarrollos numéricos así como las gráficas se han obtenido con Maple tomando los valores específicos de los parámetros que se recogen en la tabla siguiente además del periodo temporal no finito. Observemos que los parámetros c_i , d_i , $i = 1, 2$ se han seleccionado de forma que una coalición tenga unos costes más altos que la otra. También hemos de hacer notar que para estos valores seleccionados las funciones $J_i(\alpha)$ y $J_i T(\alpha)$ son convexas y por tanto todos los problemas planteados

anteriormente para determinar las soluciones compromiso son programas convexos y entonces las condiciones necesarias de óptimo son también suficientes.

$d_1 = 2$	$e_{1m} = 10$	$c_1 = 5$	$\sigma = 0,5$	$\beta = 0.005$	$T_2 = 10$	$T_4 = 2$
$d_2 = 12$	$e_{2m} = 15$	$c_2 = 10$	$\rho = 0.05$	$T_1 = 5$	$T_3 = 20$	$T_5 = 30$

Las gráficas de esta sección se han obtenido partiendo del punto de la frontera $(J_1(0,6), J_2(0,6))$, que corresponde al punto de desacuerdo cuando se ha pactado disminuir el horizonte temporal desde infinito a $T = T_2$; hemos obtenido que los valores de α_1 y α_2 para este horizonte pactado son $\alpha_1 = 0,12155$, $\alpha_2 = 0,84082$; el punto ideal tiene, por tanto, como coordenadas $(J_1T(\alpha_2), J_2T(\alpha_1))$ y el valor de α^* que nos proporciona las soluciones compromiso para los distintos valores de p estudiados viene dado en la siguiente tabla:

$p = 1$	$\alpha^* = 0,5$	$J_1(0,6) - J_1T(0,5) = 5.338,33$	$J_2(0,6) - J_2T(0,5) = 8.772,97$
$p = 2$	$\alpha^* = 0,53$	$J_1(0,6) - J_1T(0,53) = 5.784,98$	$J_2(0,6) - J_2T(0,53) = 8.294,84$
$p = \infty$	$\alpha^* = 0,54$	$J_1(0,6) - J_1T(0,54) = 5.986,64$	$J_1(0,6) - J_1T(0,54) = 8.056,69$

Donde en las dos últimas columnas se muestran las disminuciones de costes de cada una de las coaliciones al modificar el horizonte temporal y puede observarse que la primera coalición disminuye más los costes a medida que aumenta el rango de la distancia, mientras que para la segunda coalición la disminución es menor al ir aumentando dicho rango.

4. CONCLUSIONES

Disminuir las emisiones de gases que producen efecto invernadero no es un problema sencillo de resolver para los países industrializados, pues de hecho dichas reducciones pueden repercutir en su entramado industrial, además el tratamiento no puede ser igual para todos los países pues reducir las emisiones es más costoso en unos países que en otros; no obstante, hoy es posible creer que todo el planeta tiene el propósito de disminuir estas emisiones y en este trabajo se presenta, para dos coaliciones internacionales, una forma de ir negociando la solución partiendo de un horizonte muy amplio pero con altos costes a un horizonte menor y con una disminución sustancial de costes. Se ofrecen distintas soluciones que las coaliciones pueden ir adoptando.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Basar, T. and G. J. Olsder (1.995): *Dynamic Non Cooperative Game Theory*. Academic Press. London.
2. Kalai, E. and M. Smorodinsky (1.975): "Other solutions to Nash's bargaining problem" *Econometrica*, Vol. 43, pp. 513-518.
3. Kaitala, V. and M. Pohjola (1.995): "Sustainable International Agreements on Greenhouse Warming. A Game Theory Study" en *Control and Game-Theoretic Models of the Environment*, Carraro, C. and J. A. Filar Ed., Birkhäuser, Boston, pp. 67-87.
4. Protocolo de Kyoto (2.002): *Diario Oficial de las Comunidades Europeas* 15.05.02, pp. L130/1-L130/20.
5. Romero, C. (1.993): *Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid. Alianza Editorial.
6. Seierstad, A. and K. Sydsaeter (1.993): *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North-Holland. Amsterdam.